Обобщенные кванторы в правдоподобных рассуждениях

О.М. Аншаков

Российский государственный гуманитарный университет

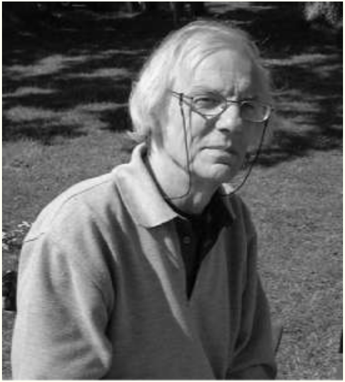
Обобщенные кванторы А. Мостовского

Понятие обобщенного квантора ввел А. Мостовский в работе

Andrzej Mostowski. On a generalization of quantifiers. Fund. Math., 44:12-36, 1957.

Обобщенные кванторы П. Линдстрёма

Более удобное для практического использования определение обобщенного квантора дал П. Линдстрём в работе



Per Lindström. First order predicate logic with generalized quantifiers. Theoria, 32:186-195, 1966

Обобщенные кванторы для формализации правдоподобных рассуждений, используемых в интеллектуальном анализе данных, применили П.Гаек и Т.Гавранек в книге

Petr Hájek, Tomáš Havránek. Mechanizing Hypothesis Formation (Mathematical Foundations for a General Theory) Springer–Verlag 1978, 396 pp.

Справка

GUHA — сокращение от
General Unary Hypotheses Automaton

Первая публикация:

Hájek P., Havel, Chytil M.: The GUHA method of automatic hypotheses determination, Computing 1 (1966) 293–308.

ДСМ-метод

Альтернативой статистическому подходу, реализованному в в GUHA-методе, является подход, основанный на формализации индукции, аналогии и абдукции, реализованный в ДСМ-медоде, предложенном В.К.Финном в работе

Финн В. К. О машинно-ориентированной формализации правдоподобных рассуждений в стиле Ф. Бэкона – Д. С. Милля // Семиотика и информатика.— 1983.–– Вып. 20.–– С. 35–101.

Справка

ДСМ — сокращение от *Джон Стюарт Милль*

Первая публикация:

Финн В. К. О возможности формализации правдоподобных рассуждений средствами многозначных логик // Всесоюзн. симп. по логике и методологии науки. – Киев: Наукова думка, 1976. – С. 82-83.

Соединение технологий ДСМ-метода и GUHA-метода предложил П.А.Григорьев в работе

Григорьев П.А. Об одном методе автоматического порождения гипотез, схожем с ДСМ-методом: применение статистических соображений // НТИ. Сер. 2.— 1996.— № 5–6.— С. 52–55.

Шаблоны для обобщенных кванторов

1. *Аншаков О.М.* Обобщенные кванторы, определяемые с помощью шаблонов. Ч.I. НТИ, сер.2, № 11, 2000, с. 5-17.
2. *Аншаков О.М.* Обобщенные кванторы, определяемые с помощью шаблонов. Ч. II. НТИ, сер. 2, № 5, 2001, с. 35–48.

Обобщенные кванторы

Обычные кванторы $\forall$ и $\exists$ суть обобщенные конъюнкция и дизъюнкция, соответственно.

Следовательно, обобщенные кванторы можно понимать как обобщения логических операций.

Обобщенный квантор Q над универсумом U будем понимать как отображение $Q\colon 2^U \to \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$.

Путь $P(x)$ — одноместный предикат,

$$X = \{a \in U \mid P(a)\}$$

Тогда

$$Q\,x\,P(x) = \mathbf{1} \Longleftrightarrow Q(X) = \mathbf{1}.$$

Обычные кванторы

Обычные кванторы можно определить следующим образом:

$$\forall(X) = \begin{cases} \mathbf{1}, & X = U, \\ \mathbf{0}, & X \neq U, \end{cases}$$

$$\exists(X) = \begin{cases} \mathbf{1}, & X \neq \emptyset, \\ \mathbf{0}, & X = \emptyset. \end{cases}$$

Путь $P(x)$ — одноместный предикат,

$$X = \{a \in U \mid P(a)\}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\forall x\, P(x) = \mathbf{1} &\Longleftrightarrow \forall (X) = \mathbf{1}\\ &\Longleftrightarrow X = U\\ &\Longleftrightarrow \{a \in U \mid P(a)\} = U\\ &\Longleftrightarrow P(a) \text{ для любого } a \in U.\end{aligned}$$

Путь $P(x)$ — одноместный предикат,

$$X = \{a \in U \mid P(a)\}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\exists x\, P(x) = \mathbf{1} &\iff \exists(X) = \mathbf{1}\\ &\iff X \neq \emptyset\\ &\iff \{a \in U \mid P(a)\} \neq \emptyset\\ &\iff P(a) \text{ для некоторого } a \in U.\end{aligned}$$

Существует в точности один и в точности два

Еще несколько кванторов:

$$\exists_1 (X) = \begin{cases} \mathbf{1}, & |X| = 1, \\ \mathbf{0}, & |X| \neq 1, \end{cases}$$

$$\exists_2 (X) = \begin{cases} \mathbf{1}, & |X| = 2, \\ \mathbf{0}, & |X| \neq 2. \end{cases}$$

Пусть на U задана некоторая мера μ:

$$\mathrm{MAJORITY}\,(X) = \begin{cases} \mathbf{1}, & \mu\,(X) > \mu\,(U \setminus X)\,, \\ \mathbf{0}, & \mu\,(X) \leq \mu\,(U \setminus X)\,, \end{cases}$$

$$\mathrm{MINORITY}\,(X) = \begin{cases} \mathbf{1}, & \mu\,(X) < \mu\,(U \setminus X)\,, \\ \mathbf{0}, & \mu\,(X) \geq \mu\,(U \setminus X)\,. \end{cases}$$

Кванторы большей арности

Выше были приведены примеры кванторов типа $\langle 1 \rangle$ или унарных кванторов.

Бинарный квантор над универсумом U будем понимать как отображение $Q\colon 2^U \times 2^U \to \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$.

Аналогично могут быть определены кванторы большей арности.

Путь $P_1(x)$ и $P_2(x)$ — одноместные предикаты,

$$X_1 = \{a \in U \mid P_1(a)\}, \quad X_2 = \{a \in U \mid P_2(a)\}.$$

Тогда

$$Q\,x\,(P_1(x), P_2(x)) = \mathbf{1} \Longleftrightarrow Q(X_1, X_2) = \mathbf{1}.$$

Бинарные кванторы

Квантор классической импликации:

$$X_1 \Rightarrow X_2 = \begin{cases} \mathbf{1}, & X_1 \subseteq X_2, \\ \mathbf{0}, & X_1 \not\subseteq X_2, \end{cases}$$

Квантор ДСМ-импликации (с запретом на контрпример):

$$X_1 \Rightarrow_{\text{JSM}} X_2 = \begin{cases} \mathbf{1}, & |X_1 \cap X_2| \geq 2 \text{ и } X_1 \cap (U \setminus X_2) = \emptyset, \\ \mathbf{0}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Путь $P_1(x)$ и $P_2(x)$ — одноместные предикаты,

$$X_1 = \{a \in U \mid P_1(a)\}, \quad X_2 = \{a \in U \mid P_2(a)\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
(P_1(x) \Rightarrow_x P_2(x)) = \mathbf{1} & \\
& \Longleftrightarrow (X_1 \Rightarrow X_2) = \mathbf{1} \\
& \Longleftrightarrow X_1 \subseteq X_2 \\
& \Longleftrightarrow \{a \in U \mid P_1(a)\} \subseteq \{a \in U \mid P_2(a)\} \\
& \Longleftrightarrow \text{ для любого } a \in U, P_1(a) \text{ влечет } P_2(a).
\end{aligned}$$

Бинарные кванторы

Квантор, использующий статистические соображения:

$$X_1 \Rightarrow_{\text{STAT}} X_2 = \begin{cases} \mathbf{1}, & \dfrac{\mu\left(X_1 \cap X_2\right)}{\mu\left(X_1\right)} \ggg \dfrac{\mu\left(\left(U \setminus X_1\right) \cap X_2\right)}{\mu\left(U \setminus X_1\right)}, \\ \mathbf{0}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Спасибо за внимание!